Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.925

ГРИЦУК
Евгений Васильевич

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности «01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

Гродно, 2014

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель: **Громак Валерий Иванович,**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Юрчук Николай Иосифович,**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета;

Пронько Вячеслав Аркадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

Оппонирующая организация: **учреждение образования «Могилёвский государственный университет имени А. А. Кулешова»**.

Защита состоится 19 декабря 2014 г. в 12.00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу:
230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209.
Телефон ученого секретаря: (+375) 152 74 43 76; (+375) 152 73 19 26.
E-mail: v.a.pronko@gmail.com; n.nech@grsu.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

Автореферат разослан 18.11.2014.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций К 02.14.02 В. А. Пронько

ВВЕДЕНИЕ

Задача интегрирования систем дифференциальных уравнений является одной из важнейших задач теории дифференциальных уравнений [1,2]. Зачастую именно отсутствие методов интегрирования обусловливает невозможность до конца исследовать все решения системы дифференциальных уравнений. Любой новый метод построения решений систем дифференциальных уравнений позволяет если не завершить исследование прикладных задач, то хотя бы существенно продвинуть его вперед. Ярким примером служит метод С. В. Ковалевской. Требуя, чтобы решения системы дифференциальных уравнений, моделирующей вращение твердого тела с неподвижной точкой, не имели подвижных критических особых точек в комплексной области, С. В. Ковалевская нашла дополнительные значения параметров системы, при которых интегрирование системы стало возможным. Таким образом, С. В. Ковалевской был найден новый интегрируемый случай в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Этот интегрируемый случай был найден из наблюдения, что в ранее известных случаях Эйлера-Пуансо и Лагранжа общее решение системы мероморфно на комплексной плоскости независимого переменного. С. В. Ковалевская априори потребовала выполнение условий, при которых общее решение представляется формальным мероморфным рядом (в этом и состоит основная суть предложенного и развитого позднее Пенлеве-анализа).

По мере все большего интереса со стороны прикладных исследований к нелинейным дифференциальным уравнениям, как обыкновенным, так и в частных производных, открываются и новые методы поиска интегрируемых случаев соответствующих уравнений и систем. В 1967 году Гарднер (C. Gardner), Грин (J. Greene), Краскал (M. Kruskal) и Миура (R. Miura)[3] открыли метод точного решения задачи Коши для некоторых нелинейных уравнений в частных производных, получивший название «метод обратной задачи рассеяния». Приложение метода обратной задачи рассеяния к эволюционным уравнениям математической физики расширялось, и возник вопрос о критерии распознавания уравнений, интегрируемых этим методом. В книге М. Абловица (M. Ablowitz) и Х. Сигура (H. Segur) по этому поводу сформу-

[1] *Голубев, В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 436 с.)

[2] *Айнс, Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 719 с.

[3] *Gardner, C. S.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura // Phys. Rev. Lett. – 1967. – V. 19. – P. 1095-1097.

лирована **гипотеза о свойстве Пенлеве (P. Painlevé)**[4] *«нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных можно решить методом обратной задачи рассеяния только в том случае, когда любое нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, полученное из него в результате точной редукции, имеет P-тип, возможно, после дополнительной замены переменной»*.

Таким образом, резко возрос интерес к уравнениям со свойством Пенлеве[5], а точнее – к проблеме классификации нелинейных обыкновенных уравнений. В силу того, что для обыкновенных дифференциальных уравнений выше второго порядка в общем случае эта проблема открыта, стали возникать и новые подходы к исследованию дифференциальных уравнений на свойство Пенлеве (Пенлеве-анализ).

Так, в 1978 году в работе М. Абловица и др.[6] приведены примеры редукций к уравнениям Пенлеве-типа некоторых интегрируемых методом обратной задачи рассеяния дифференциальных уравнений в частных производных. В 1980 году М. Абловицем и др.[7] был предложен метод резонансов тестирования обыкновенного дифференциального уравнения на свойство Пенлеве. Основной идеей метода явилась идея С. В. Ковалевской о возможности представления общего решения формальным мероморфным разложением[8]. А в 1983 году в статье Дж. Вайса (J. Weis) и др.[9] этот метод получил распространение непосредственно на дифференциальные уравнения в частных производных, минуя процесс их редукции к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

При применении к обыкновенному дифференциальному уравнению метода резонансов удается определить ряды, лишь формально удовлетворяющие дифференциальному уравнению, в окрестности подвижного полюса. Доказательство сходимости получаемых рядов в случае дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков успешно проводилось путем сведения уравнений к системам Брио и Буке[10,11]. Для некоторых систем трех

[4] *Абловиц, М.* Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. – Москва: Изд-во «Мир», 1987. – 270 с.

[5] *Кудряшов, Н. А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М.: Институт компьютерных исследований, 2004. – 359 с.

[6] *Ablowitz, M. J.* Nonlinear evolution equations of Painlevé type / M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur // Lett. Nuovo Cim. – 1978. – V. 23. – P. 333-338.

[7] *Ablowitz, M. J.* A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type / M. J. Ablowitz, A. Ramani and H. Segur // J. Math. Phys. – 1980. – V. 21, №4. – P. 715-721.

[8] *Ковалевская, С. В.* Научные работы / С. В. Ковалевская. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – 368 с.

[9] *Weiss, J.* The Painleve property for partial differential equations / J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevalle // J. Math. Phys. – 1983. – V. 24, №3. – P. 522-526.

[10] *Атрохов К. Г.* Решение системы Шази / К. Г. Атрохов, В. И. Громак // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, №6. – С. 777-790.

[11] *Громак, В. И.* О свойствах решений уравнений иерархии K_2 / В. И. Громак // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, №2. – С. 172-180.

дифференциальных уравнений также использовался метод сведения к системам Брио и Буке [12,13].

Теория систем Брио и Буке использовалась и ранее [14,15] для доказательства сходимости разложений в окрестности особых точек уравнений и систем. В случае дифференциальных систем со специальной правой частью вопрос сходимости рядов, возникающих при применении метода резонансов, решен положительно Адлером М.[16] и Брениг Л.[17]. Также отметим работу[18], в которой для систем с полиномиальными по искомым функциям правыми частями доказывается сходимость полярных рядов из метода резонансов. Предложенный метод основывается на зеркальных преобразованиях (mirror transforms), которые приводят к системе, для которой применима теорема Коши о существовании голоморфного решения. Таким образом, задача доказательства сходимости для систем с рациональной правой частью оставалась открытой. Актуальность решения этой задачи отмечена также в монографии С. Л. Соболевского[19] (стр. 20).

В данной работе проблема сходимости формальных разложений, получаемых методом резонансов, решается для широкого класса обыкновенных дифференциальных уравнений и систем с переменными коэффициентами и рациональными по искомым функциям правыми частями, включающего системы с полиномиальной правой частью в качестве частного случая. Для таких систем используется метод сведения к системам Брио и Буке, что позволяет воспользоваться результатами теории этих систем [20,21,22] и, в частности, установить существование полярных или алгеброидных реше-

[12] *Sachdev, P. L.* Singularity Structure of Third-Order Dynamical Systems. I / P. L. Sachdev, S. Ramanan // Stud. Appl. Math. – 1998. – P. 255-275.

[13] *Sachdev, P. L.* Singularity Structure of Third-Order Dynamical Systems. II / P. L. Sachdev, S. Ramanan // Stud. Appl. Math. – 1998. – P. 277-310.

[14] *Яблонский, А. И.* Аналитические свойства решений систем дифференциальных уравнений: автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.003 / А. И. Яблонский. – Минск, 1971. – 17 с.

[15] *Громак, В. И.* Об алгебраических решениях пятого уравнения Пенлеве / В. И. Громак, Г. В. Филипук // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, №3. – С. 299-307.

[16] *Adler, M.* The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis / M. Adler, P. van Moerbeke // Invent. math. – 1989. – V. 97. – P. 3-51.

[17] *Brenig, L.* Painlevé analysis and normal forms / L. Brenig, A. Goriely. – Cambridge University Press, Cambridge. – 1994. – P. 211-238.

[18] *Jishan, Hu.* Analytical Aspects of the Painlevé Test / Jishan Hu, Min Yan // Department of Mathematics, The Hong Kong University of Science and Technology, Clear Water Bay, Kowloon, Hong Kong. Email: majhu@ust.hk

[19] *Соболевский, С. Л.* Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений / С. Л. Соболевский. – Мн.: БГУ, 2006. – 119 с.

[20] *Шемякина, Т. К.* Исследование решений систем двух уравнений Брио и Буке при наличии нулевых корней характеристического уравнения / Т. К. Шемякина, А. И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18. – №5. – С. 911-912.

[21] From Gauss to Painlevé: a Modern Theory of Special Functions / K. Iwasaki [et al.]. – Braunschweig: Aspects Math. E. V. 16, 1991. – P. 348

[22] *Gromak, V. I.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane / V. I. Gromak, I. Laine, S. Shimomura. – Berlin; New York. V. 28, 2002. – 303 p.

ний[23] в случае выполнения условий метода резонансов для исходных систем. Также в работе исследуются такие аналитические свойства решений уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$, ${}_{2n}P_2$, K_1, K_2, как структура уравнений, порядок и характер полюсов и построение резонансных уравнений.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования проводились на кафедре дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета с 2008 по 2011 гг. в соответствии с Государственными программами фундаментальных исследований:
– «Математические модели», задание «Качественное и аналитическое исследование дифференциальных систем со свойством Пенлеве и семейств динамических систем» (сроки выполнения 2006 – 2010 гг., номер госрегистрации 20061795);
– «Конвергенция», задание «Разработка аналитических и качественных методов исследования свойств решений нелинейных дифференциальных систем» (сроки выполнения 2011 – 2015 гг., номер госрегистрации 20113044).

Цель и задачи исследования

Цель диссертационной работы – установить соответствие дифференциальных уравнений и систем, удовлетворяющих методу резонансов, системам Брио и Буке, доказать сходимость формальных разложений, полученных в результате применения метода резонансов, определить общую структуру уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$, K_1 и K_2, получить явные формулы резонансных многочленов и определить характер их корней для уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$, ${}_{2n}P_2$, K_1 и K_2.

Для достижения поставленной цели необходимо решить задачи:
– построить соответствующие системы Брио и Буке для дифференциальных уравнений и систем, удовлетворяющих условиям метода резонансов, в том числе и уравнений Пенлеве;
– найти связь между резонансным многочленом дифференциального уравнения и характеристическим многочленом соответствующей системы Брио и Буке;
– установить соответствие исследуемого дифференциального уравнения системе Брио и Буке, в окрестности подвижной критической алгебраической особой точки;

[23] *Conte, R.* The Painlevé Handbook / R. Conte, M. Musette. – Dordrecht. 2008. – 256 p.

— построить резонансные многочлены для высших аналогов уравнений Пенлеве.

Научная новизна

Все изложенные в диссертации результаты получены автором самостоятельно и являются новыми.

Положения, выносимые на защиту

— доказательство приводимости дифференциальных уравнений и систем, удовлетворяющих условиям метода резонансов, к системам Брио и Буке в окрестности подвижных полюсов и критических алгебраических особых точек;
— доказательство существования полярных и алгеброидных решений дифференциальных уравнений и систем, удовлетворяющих условиям метода резонансов в окрестности подвижных полюсов и критических алгебраических особых точек;
— определение общей структуры уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$, K_1 и K_2;
— получение явных формул резонансных многочленов и определение характера их корней для уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$, ${}_{2n}P_2$, K_1 и K_2.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все изложенные в диссертации основные результаты получены соискателем самостоятельно. Научная идея исследования и задачи были сформулированы научным руководителем доктором физ.-мат. наук, профессором В. И. Громаком. В совместных работах научному руководителю принадлежат постановки задач, выбор направлений исследований, обсуждение окончательных результатов. Работы [1, 2, 7, 8, 10] опубликованы в соавторстве с научным руководителем. Без соавторов выполнены работы [3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13].

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации докладывались на:
— научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ;
— международной математической конференции «Еругинские чтения – XIII» (Пинск, 26 – 29 мая 2009 г.);
— международной математической конференции «AMADE» (Минск, 14 – 19 сентября 2009 г.);
— 66-ой научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 20 – 22

апреля 2009 г.);
– 67-ой научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 22 – 24 апреля 2010 г.);
– международной конференции «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 7 – 10 декабря 2010 г.);
– международной математической конференции «Еругинские чтения – XIV» (Новополоцк, 12 – 14 мая 2011 г.);
– международной математической конференции «AMADE» (Минск, 12 – 17 сентября 2011 г.);
– XI Белорусской математической конференции (Минск, 4 – 9 ноября 2012 г.).

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 научных работах. Среди них 7 статей в научных изданиях, соответствующих п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 2,6 авторского листа), а также 1 статья в сборнике трудов конференции и 5 тезисов докладов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и библиографического списка, насчитывающего 114 наименований. Общий объем диссертации – 93 страницы. 9 страниц занимает список использованных источников.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **первой главе** диссертации «Обзор литературы и основные методы исследования» дается краткий обзор современного состояния и методов решения проблемы классификации обыкновенных дифференциальных уравнений и систем относительно свойства Пенлеве. Кратко излагаются основные методы Пенлеве-анализа: метод Ковалевской, Пенлеве, Конти-Форди-Пикеринга. Более подробно излагается метод резонансов, используемый ниже, и основная теорема теории систем Брио и Буке о сходимости формальных разложений. Также представлены основные результаты диссертации.

Во **второй главе** «Метод резонансов и системы Брио и Буке» рассматривается вопрос приводимости уравнений и систем, удовлетворяющих условиям метода резонансов (или проходящих тест Пенлеве), к системам Брио и Буке

$$tu'_j = f_j(t, u_1, ..., u_n), \qquad j = \overline{1, n} \tag{1}$$

с аналитическими в некоторой окрестности $t = u_1 = u_2 = ... = u_n = 0$ функциями f_j с условием $f_j(0, 0, ..., 0) = 0$ и особой точкой $t = 0$.

Для уравнения

$$w^{(n)} = P(w^{(n-1)}, \ldots, w', w, t)/Q(w^{(n-1)}, \ldots, w', w, t), \tag{2}$$

где $t = z - z_0$, z_0 – произвольная точка из области G, а P и Q – полиномы $w^{(n-1)}, \ldots, w$ с аналитическими по t коэффициентами, выполнимость условий метода резонансов предполагает существование формального разложения решения

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j-k} \tag{3}$$

с $c_0 \neq 0, k \in \mathbb{N}$, c_j– аналитичны по z_0 и среди них есть $n-1$ произвольный. При этом резонансы [24] для каждой пары (c_0, k) однократны и их $n-1$, а отличные от -1 и, возможно, от нуля – целые положительные числа.

Прежде всего, устанавливается свойство, что среди корней резонансного уравнения, определяющего резонансы, есть один корень равный -1. Затем доказывается

Теорема 2.2. [1, 8] *Если уравнение* (2) *проходит тест Пенлеве, то в окрестности подвижной особой точки оно может быть преобразовано к системе Брио и Буке* (1) *и разложение* (3) *для уравнения* (2) *является сходящимся в некоторой проколотой окрестности точки* z_0.

Преобразование, приводящее (2) к системе (1), определяется характером разложения (3) и выписывается в явном виде. Сходимость (3) следует из теории систем Брио и Буке (теорема А.12) [22] . Также устанавливается свойство совпадения множества резонансов и собственных значений матрицы коэффициентов линейной части системы Брио и Буке.

Приложение теоремы 2.2 демонстрируется в **подразделе 2.2.1** доказательством сходимости разложений полярных решений уравнений Пенлеве сведением последних к системам Брио и Буке.

Далее исследуется обратный вопрос – использования систем Брио и Буке для проведения Пенлеве-анализа. Точнее доказана

Теорема 2.3. [1] *Пусть для всех возможных наборов ведущих членов уравнения* (2) *соответствующие им пары* (c_0, k) *таковы, что* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $c_0 \neq 0$, *а системы Брио и Буке* (1), *соответствующие в окрестности подвижной особой точки уравнению* (2) *и преобразованному уравнению* (2),

[24]номера j_r коэффициентов c_j в разложении (2), для которых c_{j_r} произвольны (индексы Фукса, показатели Ковалевской).

удовлетворяют условиям:
1) *все собственные значения их линейных частей являются однократными, а отличные от* -1 *и, возможно, от нуля — положительными целыми числами;*
2) *системы имеют голоморфные решения, содержащие* $n-1$ *произвольный параметр, а в случае существования нулевого собственного значения* c_0 *является произвольным параметром и системы имеют голоморфные решения, содержащие* $n-2$ *произвольных параметра.*
Тогда уравнение (2) *проходит тест Пенлеве.*

В **разделе 2.3** исследуется приводимость систем

$$x_i' Q_i(x_1, x_2, ..., x_n, t) = P_i(x_1, x_2, ..., x_n, t),\ i = 1, 2, ..., n, \tag{4}$$

где $t = z - z_0, z_0$ — произвольная точка в области $G \subset \mathbb{C}$, а $P_i,\ Q_i$ — полиномы $x_1, x_2, ..., x_n$ с аналитическими по t коэффициентами, удовлетворяющих условиям метода резонансов к системам Брио и Буке.

Доказаны аналогичные утверждения (теорема 2.5, теорема 2.6 [2, 10]), определяющие приводимость (4) к системам Брио и Буке (1). В качестве примера рассмотрена система Лоренца, для которой методом систем Брио и Буке получены известные параметрические условия свойства Пенлеве [2, 9].

В **разделе 2.4** исследуется вопрос существования алгеброидных решений нелинейных уравнений n-го порядка (2) в случае существования алгебраической особой точки, то есть существования формального решения

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} c_{\frac{j}{p}} t^{\frac{j-s}{p}} := c_0 t^{-\frac{s}{p}} + c_{\frac{1}{p}} t^{\frac{1-s}{p}} + c_{\frac{2}{p}} t^{\frac{2-s}{p}} + ..., \tag{5}$$

где $c_0 \neq 0, p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, s \in \mathbb{N}$ и s взаимнопростое с p, при выполнении условий метода резонансов. Доказано (теорема 2.7 [6], формулировка которой аналогична теореме 2.2), что в этом случае уравнение (2) преобразованием, которое выписано в явной форме, приводится к системе Брио и Буке, а разложение вида (5) является сходящимся в некоторой области, при этом собственные значения матрицы линейной части системы Брио и Буке $\lambda_j = pr_j$, где r_j- резонансы уравнения (2).

В **главе 3** «Об аналитических свойствах решений уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$ и ${}_{2n}P_2$» и **главе 4** «Об аналитических свойствах решений уравнений иерархий K_1 и K_2» рассматриваются аналитические свойства решений иерархии первого и второго уравнений Пенлеве ${}_{2n}P_1,\ {}_{2n}P_2,\ K_1$ и K_2 [3, 4, 5, 7, 11, 12, 13]. Заметим, что уравнения этих иерархий задаются рекуррентным образом [25,26,27].

Однако для анализа уравнений методом резонансов и в целом для определения свойства Пенлеве важно знать структуру уравнения, которая определяет доминантные члены и резонансный многочлен.

Относительно структуры уравнения иерархии ${}_{2n}P_1$, которое получено редукцией из уравнения в частных производных иерархии Кортевега - де Фриза, записанного в форме [25]

$$d_{n+1}(w) + 4z = 0, \qquad ({}_{2n}P_1)$$

где последовательность операторов $d_{n+1}(w)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\frac{d}{dz}(d_{n+1}(w)) = (D^3 - 8wD - 4w_z)d_n(w), \qquad (6)$$

с $d_1(w) = -4w, D = \frac{d}{dz}, n = 1, 2, ...,$ доказана

Теорема 3.1. [3, 11] *Уравнение* $({}_{2n}P_1), n \geq 2,$ *имеет структуру*

$$w_{2n} = \gamma_n w_0^{n+1} + P_n(w_0, w_1, ..., w_{2n-2}) + z, \qquad (7)$$

где $w_m = \frac{d^m w}{dz^m}$, $m = 0, 1, ..., 2n,$ P_n- *полином от* $w_0, w_1, ..., w_{2n-2}$ *степени* $n,$ *вида*

$$P_n(w_0, w_1, ..., w_{2n-2}) = \sum_{\langle k\rangle = 2n+2, k_0 \leq n-1} b_{k_0k_1...k_{2n-2}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} ... w_{2n-2}^{k_{2n-2}},$$

где $k = (k_0, k_1, ..., k_{2n-2})$ *с нормой*

$$\langle k\rangle := \sum_{p=0}^{2n-2} (p+2)k_p,$$

$b_{k_0k_1...k_{2n-2}}$ $-$ *константы, и*

$$\gamma_n = \frac{(-1)^{n+1}2^{3n+1}\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+2)\Gamma(1/2)},$$

$\Gamma(\cdot)$ – *гамма-функция.*

Заметим, что для записи уравнений $({}_{2n}P_1)$ в явной форме использование рекуррентного соотношения (6) предполагает вычисление большого числа интегралов в явной форме. Теорема 3.1 для записи уравнений в явной форме

[25] *Kudrjashov, N. A.* The first and second Painlevé equations of higher order and some relations between them / N. A. Kudrjashov // Phys. Lett. A. – 1997. – V. 224. – P. 353-360.

[26] *Кудряшов, Н. А.* Методы нелинейной математической физики / Н. А. Кудряшов. – М.: Интеллект Групп, 2010. – 368 с.

[27] *Громак, В. И.* Первое уравнение Пенлеве высшего порядка / В. И. Громак // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, №1. – С. 38-42.

позволяет заменить интегрирование решением системы линейных алгебраических уравнений.

В **подразделе 3.1.2** доказано, что произвольное решение уравнения $({}_{2n}P_1)$ может иметь подвижный полюс лишь второго порядка, то есть в окрестности подвижного полюса формальное разложение имеет вид

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j-2}, \tag{8}$$

где $t = z - z_0, z_0 \in \mathbb{C}$, а c_0 определяется соотношением

$$\prod_{m=1}^{n} (c_0 - m(m+1)/2) = 0. \tag{9}$$

Относительно резонансов доказана

Теорема 3.2. [3] *Резонансный многочлен уравнения* $({}_{2n}P_1)$ *имеет вид*

$$R_{2n}(r, c_0) = \prod_{j=1}^{m} (r+2j-1)(r-2(n+j+1)) \prod_{s=1}^{n-m} (r-2s)(r-2m-2s-1). \tag{10}$$

Все корни многочлена (10) *целые и однократные.*

В качестве приложения полученных результатов рассматриваются свойства решений уравнения

$$\begin{aligned} w^{(6)} = 280w^4 + 28ww^{(4)} + 42(w'')^2 + 56w'w^{(3)} - 280w(w')^2 - \\ -280w^2w'' + z. \end{aligned} \tag{${}_6P_1$}$$

Для уравнения $({}_6P_1)$ $c_0 \in \{1, 3, 6\}$. Для каждого случая доказывается (теорема 3.4 [3]) существование семейств полярных решений вида (8), содержащего 5 произвольных параметров, соответствующих набору резонансов -1, 2, 4, 5, 7, 10, в случае $c_0 = 1$; 4 произвольных параметра, соответствующих набору резонансов $-1, -3$, 2, 7, 10, 12, в случае $c_0 = 3$ и 3 произвольных параметра, соответствующих набору резонансов $-1, -3, -5$, 10, 12, 14, в случае $c_0 = 6$.

В **подразделе 3.1.4** аналогичные результаты (теорема 3.5 [3]) доказываются для уравнения

$$\begin{aligned} w^{(8)} = -2016w^5 + 36ww^{(6)} + 108w'w^{(5)} + 228w''w^{(4)} - 504w^2w^{(4)} + \\ +138\left(w^{(3)}\right)^2 - 2016ww'w^{(3)} - 1512w(w'')^2 - 1848w''(w')^2 + \\ +3360w''w^3 + 5040w^2(w')^2 + z. \end{aligned} \tag{${}_8P_1$}$$

В этом случае $c_0 \in \{1, 3, 6, 10\}$. Число свободных параметров полярного решения (8), соответствующих набору резонансов -1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 12, равно 7, в случае $c_0 = 1$; соответствующих набору резонансов $-1, -3,\ 2,\ 4,\ 7,\ 9,\ 12,\ 14$ равно 6, в случае $c_0 = 3$; соответствующих набору резонансов $-1, -3, -5,\ 2, 9, 12, 14, 16$ равно 5, в случае $c_0 = 6$; соответствующих набору резонансов $-1, -3, -5, -7,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18$ равно 4, в случае $c_0 = 10$.

В **разделе 3.2** рассматриваются свойства решений уравнений иерархии ${}_{2n}P_2$, которые получены из иерархии модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, представленные в рекуррентной форме [25,28]

$$\left(\frac{d}{dz} + 2w\right) L_n[w' - w^2] = zw + \alpha_n, n \geq 1, \qquad ({}_{2n}P_2)$$

где последовательность операторов $L_n[u]$ определяется соотношением

$$\frac{d}{dz} L_{n+1}[u] = (D^3 + 4uD + 2u_z)L_n[u], L_1[u] = u, D = \frac{d}{dz}, n = 1, 2, 3, ...$$

Полиномиальная структура уравнения $({}_{2n}P_2)$ известна[29]. Доказана

Теорема 3.6. [4] *Резонансный многочлен уравнения* $({}_{2n}P_2)$ *имеет вид*

$$R_{2n}(r, c_0) = \prod_{j=1}^{m}(r + 2j - 1)(r - 2(n + j)) \prod_{s=1}^{n-m}(r - 2s)(r - 2m - 2s + 1), \quad (11)$$

где c_0 *определяется из уравнения* $\prod_{m=1}^{n}(c_0^2 - m^2) = 0$.
Все корни резонансного многочлена (11) *целые и однократные.*

Аналогично, как и для уравнения $({}_{2n}P_1)$, доказывается, что уравнение $({}_{2n}P_2)$ может иметь подвижный полюс лишь первого порядка, то есть в окрестности подвижного полюса z_0 формальное разложение имеет вид

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j-1}, \qquad (12)$$

где $t = z - z_0, c_0 \neq 0$.

В качества приложений в **подразделе 3.2.4** рассматривается уравнение

$$\begin{aligned} w^{(6)} - 20w^7 - 14w^2w^{(4)} - 42w(w'')^2 - 56ww'w^{(3)} - 70w''(w')^2 + \\ +70w^4w'' - 140w^3(w')^2 = zw + \alpha_3, \end{aligned} \qquad ({}_6P_2)$$

а в **подразделе 3.2.5** – уравнение $({}_8P_2)$. При этом для уравнения $({}_6P_2)$ $c_0 \in \{\pm1, \pm2, \pm3\}$. В случае $c_0 = \pm1$ полярное разложение (12) содержит 5 произвольных параметров, соответствующих набору резонансов $-1,\ 2,\ 3,\ 4,$

[28] *Airault, H.* Rational solutions of Painlevé equations / H. Airault // Stud. Appl. Math. – 1979. – V. 61. – P. 31-53.

[29] *Yezhou, Li.* On analytic properties of higher analogs of the second Painlevé equation / Yezhou Li, Yuzan He // J. Math. Phys. – 2002. – V. 43, №2. – P. 1106-1115.

5, 6; в случае $c_0 = \pm 2$ разложение (12) содержит 4 произвольных параметра, соответствующих набору резонансов $-1, -3,\ 2, 5, 8, 10$; в случае $c_0 = \pm 3$ — 3 произвольных параметра, соответствующих набору резонансов $-1, -3, -5$, 8, 10, 12.

Для уравнения

$$\begin{gathered}w^{(8)} + 70w^9 - 420w^6w'' - 1260w^5(w')^2 + 126w^4w^{(4)}+\\ +252w^3(4w'w^{(3)} + 3(w'')^2) + 6w^2(518w''(w')^2 - 3w^{(6)})+\\ +6w(133(w')^4 - 18w'w^{(5)} - 38w''w^{(4)} - 23(w^{(3)})^2)-\\ -210(w')^2w^{(4)} - 182(w'')^3 - 756w'w''w^{(3)} = zw + \alpha_4\end{gathered} \qquad ({}_8P_2)$$

$c_0 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$. В случае $c_0 = \pm 1$ полярное разложение (12) содержит 7 произвольных параметров, соответствующих набору резонансов -1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10; в случае $c_0 = \pm 2$ разложение (12) содержит 6 произвольных параметров, соответствующих набору резонансов $-1, -3,\ 2, 4, 5, 7$, 10, 12; в случае $c_0 = \pm 3$ — 5 произвольных параметров, соответствующих набору резонансов $-1, -3, -5$, 2, 7, 10, 12, 14; в случае $c_0 = \pm 4$ — 4 произвольных параметра, соответствующих набору резонансов $-1, -3, -5, -7$, 10, 12, 14, 16.

Для уравнений $({}_6P_2)$ и $({}_8P_2)$ дано доказательство существования полярных решений вида (12) (теорема 3.8 и теорема 3.9 [4]).

В **главе 4** «Об аналитических свойствах решений уравнений иерархий K_1 и K_2» рассматриваются иерархии K_1 и K_2[30] [5, 7, 12, 13].

Уравнения иерархии K_1 получены редукцией из уравнений в частных производных Кодри-Додда-Гибона[30] и представляется в виде

$$h_n(w) = z, \qquad (K_1)$$

$$h_{n+2}(w) = J(w)\Omega(w)h_n(w), \qquad (13)$$

$$h_0(w) = 1, h_1(w) = w'' + 4w^2, n = 0, 1, 2, ...,$$

$$\Omega(w) = D^3 + 2wD + w_z,$$

$$J(w) = D^3 + 3(wD + Dw) + 2(D^2wD^{-1} + D^{-1}wD^2) + 8(w^2D^{-1} + D^{-1}w^2),$$

$$D = \frac{d}{dz}, D^{-1} = \int(\cdot)dz.$$

Установлена

Теорема 4.1. [5] *Уравнение* $(K_1), n \geq 2$, *имеет структуру*

$$w_{3n+s-2} + \gamma_{3n+s-2}w_0^{\frac{1}{2}(3n+s)} + P_{\frac{1}{2}(3n+s-2)}(w_0, w_1..., w_{3n+s-4}) - z = 0, \qquad (14)$$

[30] *Kudryashov N. A.* Discrete equations corresponding to fourth-order differential equations of the P2 and K2 hierarchies / N. A. Kudryashov, M. B. Soukharev // ANZIAM, Industrial and Applied Mathematics. – 2000. – V. 44. – P. 149-160.

где $w_m = \frac{d^m w}{dz^m}, m = 0, 1, ..., 3n + s - 2$, $P_{\frac{1}{2}(3n+s-2)}$ *– полином от* $w_0, w_1, ..., w_{3n+s-4}$ *степени* $\frac{1}{2}(3n + s - 2)$, *вида*

$$P_{\frac{1}{2}(3n+s-2)}(w_0, ..., w_{3n+s-4}) = \sum_{\langle k\rangle=3n+s, k_0\leq\frac{3n+s-4}{2}} b_{k_0...k_{3n+s-4}} w_0^{k_0}...w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}}, \tag{15}$$

где $k = (k_0, k_1, ..., k_{3n+s-4})$ *с нормой*

$$\langle k\rangle := \sum_{p=0}^{3n+s-4} (p + 2)k_p, \tag{16}$$

$b_{k_0...k_{3n+s-4}}$ *– константы и*

$$\gamma_{3n+s-2} = \gamma_{4s+4} \prod_{j=0}^{(n+s-4)/2} \frac{2^5(3n + s - 5 - 6j)(3n + s - 2 - 6j)}{(3n + s - 4 - 6j)(3n + s - 6j)}. \tag{17}$$

В теореме 4.1 $s = 0$, если n четное и $s = 1$ при нечетном n.
Выбор начального γ определяется для $n = 2$, $s = 0$ $\gamma_4 = \dfrac{32}{3}$; для $n = 3$, $s = 1$ $\gamma_8 = \dfrac{256}{3}$; $\prod_0^{-1} = 1$.

Лемма 4.1. [5] *Если решение уравнения* (K_1) *имеет подвижный полюс, то только второго порядка.*
Выбор c_0, $c_0 \neq 0$ в формальном разложении решения уравнения (K_1) вида (8), осуществляется на основании

Лемма 4.2. [5] *Для четных* n c_0 *определяется из условия*

$$\prod_{j=0}^{(n-2)/2} (2c_0 + 9j^2 + 12j + 3)(2c_0 + 36j^2 + 48j + 15)(c_0 + 18j^2 + 6j) = 0, \tag{18}$$

Для нечетных n c_0 *определяется из условия*

$$\begin{aligned}(2c_0 + 3) \textstyle\prod_{j=0}^{(n-3)/2}(2c_0 + 9j^2 + 24j + 15)(2c_0 + 36j^2 + 96j + 63)\times \\ \times(c_0 + 18j^2 + 30j + 12) = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Соотношение (18) порождает три типа коэффициентов c_0, а соотношение (19) четыре типа коэффициентов. Для каждого из этих 7 типов коэффициентов приведены в явной форме резонансные многочлены. Так, например, для первого типа c_0 из (18)

$$c_0^{(1)}(l) = -\frac{1}{2}(9l^2 + 12l + 3), l = 0, 1, 2, ..., \frac{n-2}{2}, n = 2, 4, 6, ...$$

резонансный многочлен имеет вид

$$\begin{aligned}
&R_{3n-2}\left(r, c_0^{(1)}(l)\right) = (r+1)(r-3n+3)(r-3n+2)(r-3n-2)\times\\
&\times\prod\nolimits_{j=0}^{l-1}(r-6j+6l-3n+3)(r-6j+6l-3n+2)(r+3j-3n-3l)\times\\
&\qquad\qquad\times(r+6j-3n-6l-2)(r+3j+2)(r+6j+7)\times\\
&\times\prod\nolimits_{i=0}^{(n-2l-4)/2}(r-6i-3)(r-6i-4)(r-6i-6)(r-6i-3l-5)\times\\
&\qquad\qquad\qquad\times(r-6i-3l-8)(r-6i-6l-7).
\end{aligned}$$

Для первого коэффициента из (19) $c_0 = -\dfrac{3}{2}$ резонансный многочлен имеет вид

$$\begin{aligned}
&R_{3n-1}\left(r, c_0^{(1)}\right) = (r+1)(r-6)\times\\
&\times\prod\nolimits_{j=0}^{(n-3)/2}(r-6j-3)(r-6j-4)(r-6j-5)(r-6j-7)\times\\
&\qquad\qquad\qquad\times(r-6j-8)(r-6j-12).
\end{aligned}$$

Для второго типа коэффициентов из (19)

$$c_0^{(2)}(l) = -\frac{1}{2}(9l^2+24l+15), l = 0,1,2,..., \frac{n-3}{2}, n = 3,5,7,...$$

резонансный многочлен имеет вид

$$\begin{aligned}
&R_{3n-1}\left(r, c_0^{(2)}(l)\right) = (r+1)(r+5)(r-2)(r-3)\times\\
&\qquad\times(r-3n-3)(r-3n-7)(r-3n+6l+1)(r-3n+6l)\times\\
&\times\prod\nolimits_{j=0}^{l-1}(r-3j-3n-6)(r-6j-3n-13)(r-6j-3n+6l-5)\times\\
&\qquad\times(r-6j-3n+6l-6)(r-3j+3l+1)(r-6j+6l+5)\times\\
&\times\prod\nolimits_{i=0}^{(n-2l-5)/2}(r-6i-8)(r-6i-9)(r-6i-6)(r-6i-3l-7)\times\\
&\qquad\qquad\qquad\times(r-6i-3l-10)(r-6i-6l-11).
\end{aligned}$$

Относительно всех резонансных многочленов уравнения (K_1) во всех случаях справедлива

Теорема 4.2. [5] *Резонансные многочлены уравнения* (K_1) *имеют только целые и однократные корни.*

В **подразделе 4.1.4** рассматривается уравнение (K_1) при $n = 3$

$$\begin{aligned}
&w^{(8)} + \frac{256}{3}w^5 + \frac{1120}{3}w^3w'' + 560w^2(w')^2+\\
&\quad+136w^2w^{(4)} + 84(w^{(3)})^2 + 60w'w^{(5)} + 134w''w^{(4)}+\\
&\quad+554ww'w^{(3)} + 20ww^{(6)} + 396w''(w')^2 + 408w(w'')^2 - z = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Теорема 4.4. [5] *Уравнение* (20) *имеет полярные решения в виде ряда* (8), *сходящегося в области* $0 < |z - z_0| < \rho, \rho > 0.$

Заметим, что для уравнения (20) возможны 4 случая выбора c_0, $c_0 \in \{-\frac{3}{2}, -\frac{15}{2}, -12, -\frac{63}{2}\}$. Число свободных параметров полярного решения (8), соответствующих набору резонансов $-1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 12$, равно 7, в случае $c_0 = -\frac{3}{2}$; соответствующих набору резонансов $-1, -5,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9,\ 12,\ 16$ равно 6, в случае $c_0 = -\frac{15}{2}$; соответствующих набору резонансов $-1, -2, -7,\ 3,\ 8,\ 12,\ 13,\ 18$ равно 5, в случае $c_0 = -12$; соответствующих набору резонансов $-1, -5, -7, -13,\ 12,\ 16,\ 18,\ 24$ равно 4, в случае $c_0 = -\frac{63}{2}$.

В **разделе 4.2** рассматриваются уравнения иерархии K_2, которые получены редукцией из уравнений в частных производных Каупа-Купершмидта[30], и представляются в виде

$$\left(\frac{d}{dz} + w\right) h_n \left(w_z - \frac{1}{2}w^2\right) - zw + \beta = 0, \qquad (K_2)$$

где последовательность $h_n(\cdot)$ определяется в (13). В силу того, что в определении уравнения (K_2) используется оператор $h_n(\cdot)$, то из структуры уравнения (K_1) следует структура уравнения (K_2) имеющая следующий вид
Теорема 4.5. [7, 12] *Уравнение* $(K_2), n \geq 2,$ *имеет структуру*

$$w_{3n+s} + \alpha_{3n+s} w_0^{3n+s+1} + Q_{3n+s-1}(w_0, w_1, ..., w_{3n+s-2}) - zw + \beta = 0, \qquad (21)$$

где $w_m = \frac{d^m w}{dz^m}$, $m = 0, 1, ..., 3n+s$, Q_{3n+s-1} *– полином от* $w_0, w_1, ..., w_{3n+s-2}$ *степени* $3n + s - 1$, *вида*

$$Q_{3n+s-1} = \sum_{\langle k\rangle = 3n+s+1, k_0 \leq 3n+s-2} b_{k_0 k_1 \dots k_{3n+s-2}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-2}^{k_{3n+s-2}}, \qquad (22)$$

где $k = (k_0, k_1, ..., k_{3n+s-2})$ *с нормой*

$$\langle k\rangle := \sum_{p=0}^{3n+s-2} (p+1) k_p;$$

$b_{k_0 k_1 \dots k_{3n+s-2}}$ *– константы и* $\alpha_{3n+s} = (-\frac{1}{2})^{\frac{3n+s}{2}} \gamma_{3n+s-2}$, *где* γ_{3n+s-2} *определено формулой* (17) *.*

Для $n = 2$ имеем

$$\begin{aligned} w^{(6)} - \frac{4}{3}w^7 - w\left(\frac{28}{3}(w')^3 + 21(w'')^2 + 28w'w^{(3)}\right) + \\ +7w'w^{(4)} - 7w^2(2w'w'' + w^{(4)}) + 14w''w^{(3)} - 28(w')^2 w'' + \\ +14w^4 w'' + 28w^3(w')^2 - zw + \beta = 0. \end{aligned} \qquad ({}_6K_2)$$

Лемма 4.3. [7] *Если решение уравнения* (K_2) *имеет подвижный полюс, то только первого порядка.*

Коэффициент c_0 определяется [7] из уравнения

$$(c_0 - 3n)\prod_{j=0}^{(n-2)/2}(c_0 - 6j - 3)(c_0 - 6j)(c_0 - 3j - 1)(c_0 + 6j + 5)\times \\ \times(c_0 + 6j + 2)(c_0 + 3j + 3) = 0 \tag{23}$$

для четных n и

$$c_0(c_0 + 2)(c_0 + 3)(c_0 - 1)(c_0 - 3n - 1)\times \\ \prod_{j=0}^{(n-3)/2}(c_0 - 3j - 3)(c_0 - 6j - 4)(c_0 - 6j - 7)(c_0 + 3j + 5)\times \\ \times(c_0 + 6j + 6)(c_0 + 6j + 9) = 0 \tag{24}$$

для нечетных n.

Для различных значений c_0 из (23) и (24) приведён явный вид резонансных многочленов и установлен характер их корней.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Для дифференциальных уравнений и систем, удовлетворяющих условиям метода резонансов, показана их приводимость к системам Брио и Буке и доказано существование полярных и алгеброидных решений [1, 2, 6, 8, 10].

2. Определена общая структура уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$, K_1 и K_2 [3, 5, 7, 11].

3. Получены явные формулы резонансных многочленов и определен характер их корней для уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$, ${}_{2n}P_2$, K_1 и K_2 [3, 4, 7, 11, 12, 13].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Работа носит теоретический характер и является вкладом в теорию уравнений со свойством Пенлеве.

Результаты работы являются новыми и могут быть использованы в аналитической теории дифференциальных уравнений, при решении задач теоретической и математической физики, при чтении спецкурсов по аналитической теории дифференциальных уравнений.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи

1. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Дифференциальные уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1371 – 1380.

2. Грицук, Е. В. К теории нелинейных систем дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 3. – С. 25 – 30.

3. Грицук, Е. В. О локальных свойствах решений уравнений ${}_{2n}P_1$ / Е. В. Грицук // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2011. – № 2. – С. 113 – 118.

4. Грицук, Е. В. О локальных свойствах решений уравнений, аналогичных второму уравнению Пенлеве / Е. В. Грицук // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2011. – № 3. – С. 24 – 31.

5. Грицук, Е. В. О локальных свойствах решений высших аналогов первого уравнения Пенлеве / Е. В. Грицук // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2011. – № 4. – С. 33 – 41.

6. Грицук, Е. В. О алгеброидных решениях дифференциальных уравнений / Е. В. Грицук // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 126 – 131.

7. Грицук, Е. В. Аналитические свойства решений нелинейных дифференциальных уравнений типа уравнений Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2014. – № 2. – С. 32 – 39.

Материалы конференций

8. Gricuk, E. Painlevé Test and Briot-Bouquet Systems / E. Gricuk, V. Gromak // Painlevé Equations and Related Topics : Proceedings of the International Conference 17 – 23 June 2011 / De Gruyter, Berlin, 2011. – P. 69 – 70.

Тезисы докладов

9. Грицук, Е. В. О решениях системы Лоренца / Е. В. Грицук // XIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2009) : тез. докладов Международной научной конф., Пинск, 26 – 29 мая 2009 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Полесский гос. ун-т; редкол.: В. В. Амелькин [и др.]. – Пинск,

2009. – С. 11.

10. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных систем со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. междунар. конф. 14 – 19 сент. 2009 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; Минск, Беларусь, 2009. – С. 51 – 52.

11. Грицук, Е. В. О локальных свойствах решений уравнений ${}_{2n}P_1$ / Е. В. Грицук // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тез. докл. междунар. конф., Минск, 7 – 10 декабря 2010 г. / Белорус. гос. ун-т, Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: В. В. Амелькин [и др.]. – Минск, 2010. – С. 9 – 10.

12. Грицук, Е. В. Высшие аналоги второго уравнения Пенлеве / Е. В. Грицук // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. междунар. конф. 12 – 17 сент. 2011 г. / Ин-т математики НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; Минск, Беларусь, 2011. – С. 50 – 51.

13. Грицук, Е. В. О высших аналогах второго уравнения Пенлеве / Е. В. Грицук // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. конф. 4 – 9 ноября 2012 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; Минск, Беларусь, 2012. – С. 17 – 18.

РЭЗЮМЭ

Грыцук Яўгеній Васільевіч

Аналітычныя ўласцівасці рашэнняў сістэм нелінейных дыферэнцыяльных ураўненняў з уласцівасцю Пенлевэ

Ключавыя словы: уласцівасць Пенлевэ, метад рэзанансаў, сістэмы Брыю і Буке, іерархіі ўраўненняў Пенлевэ, рэзанансны мнагачлен.

Мэта даследавання. Мэта дысертацыйнага даследавання – устанавіць адпаведнасць дыферэнцыяльных ураўненняў і сістэм, якія задавальняюць метаду рэзанансаў, сістэмам Брыю і Буке і даказаць сыходнасць фармальных разлажэнняў, атрыманых у выніку прымянення метаду рэзанансаў, вызначыць агульную структуру ўраўненняў іерархій ${}_{2n}P_1$, K_1 и K_2, атрымаць яўныя формулы рэзанансных мнагачленаў і вызначыць характар іх каранеў для ўраўненняў іерархій ${}_{2n}P_1$, ${}_{2n}P_2$, K_1 и K_2.

Метады даследавання. Прымяняюцца класічныя метады аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў. Даследаванне сыходнасці фармальных разлажэнняў у наваколлі рухомых асобных пунктаў дыферэнцыяльных ураўненняў і сістэм з пераменнымі каэфіцыентамі ажыццяўляецца з дапамогай метаду пераўтварэння да сістэмы Брыю і Буке. Пры рэалізацыі гэтага метаду выкарыстоўваецца тэарэма аб сыходнасці ступенных радоў, якія фармальна задавальняюць сістэме Брыю і Буке.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыйнай рабоце атрыманы наступныя новыя вынікі:

– для дыферэнцыяльных ураўненняў і сістэм, якія задавальняюць умовам метаду рэзанансаў, паказана іх прывядзенне да сістэм Брыю і Буке і даказана існаванне палярных і алгеброідных рашэнняў;

– вызначана агульная структура вышэйшых аналагаў першага і другога ўраўненняў Пенлевэ;

– атрыманы яўныя формулы рэзанансных мнагачленаў і вызначаны характар іх каранеў для іерархій першага і другога ўраўненняў Пенлевэ.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Работа мае тэарэтычны характар і з'яўляецца ўкладам у тэорыю ўраўненняў з уласцівасцю Пенлевэ. Вынікі работы з'яўляюцца новымі і могуць быць выкарыстаны ў аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў, пры рашэнні задач тэарэтычнай і матэматычнай фізікі, пры чытанні спецкурсаў па аналітычнай тэорыі дыферэнцыяльных ураўненняў.

РЕЗЮМЕ

Грицук Евгений Васильевич

Аналитические свойства решений нелинейных дифференциальных систем со свойством Пенлеве

Ключевые слова: свойство Пенлеве, метод резонансов, системы Брио и Буке, иерархии уравнений Пенлеве, резонансный многочлен.

Цель исследования. Цель диссертационной работы – установить соответствие дифференциальных уравнений и систем, удовлетворяющих методу резонансов, системам Брио и Буке, доказать сходимость формальных разложений, полученных в результате применения метода резонансов, определить общую структуру уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$, K_1 и K_2, получить явные формулы резонансных многочленов и определить характер их корней для уравнений иерархий ${}_{2n}P_1$, ${}_{2n}P_2$, K_1 и K_2.

Методы исследования. Используются классические методы аналитической теории дифференциальных уравнений. Исследование сходимости формальных разложений в окрестности подвижных особых точек дифференциальных уравнений и систем с переменными коэффициентами осуществляется с помощью метода преобразования к системе Брио и Буке. При реализации этого метода используется теорема о сходимости степенных рядов, формально удовлетворяющих системе Брио и Буке.

Полученные результаты и их новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

– для дифференциальных уравнений и систем, удовлетворяющих условиям метода резонансов, показана их приводимость к системам Брио и Буке и доказано существование полярных и алгеброидных решений;

– определена общая структура высших аналогов первого и второго уравнений Пенлеве;

– получены явные формулы резонансных многочленов и определен характер их корней для иерархий первого и второго уравнений Пенлеве.

Рекомендации по применению. Работа носит теоретический характер и является вкладом в теорию уравнений со свойством Пенлеве. Результаты работы являются новыми и могут быть использованы в аналитической теории дифференциальных уравнений, при решении задач теоретической и математической физики, при чтении спецкурсов по аналитической теории дифференциальных уравнений.

SUMMARY

Gritsuk Eugeny Vasilievich

Analytical properties of solutions of nonlinear differential systems with the Painlevé property

Keywords: Painlevé property, resonances method, Briot – Bouquet systems, hierarchies of Painlevé equations, resonant polynomials.

The aim of the study. The aim of the thesis is to establish a correspondence between differential equations and systems satisfying the resonances method and Briot – Bouquet systems, and to prove the convergence of the formal expansions obtained by the application of the resonances method to the differential equations or systems by means of the theory of Briot – Bouquet systems. Also the aim of the thesis is to determine the general structure of equations of hierarchies ${}_{2n}P_1$, K_1 и K_2, to obtain the explicit formulas of resonant polynomials and to determine a character of their roots for equations of hierarchies ${}_{2n}P_1$, ${}_{2n}P_2$, K_1 и K_2.

Methods of research. In the thesis we use the classical methods of analytical theory of differential equations. The study of convergence of formal expansions in the neighborhood of movable singular points of differential equations and systems with variable coefficients was performed by using the transformation method to Briot – Bouquet systems. In particular, for implementation of this method we use the convergence theorem of power series formally satisfying a Briot – Bouquet system.

*The results obtained and their novelty.*In this thesis the following new results were obtained.

– For differential equations and systems which satisfy conditions of the resonances method the reducibility to Briot – Bouquet systems was shown, and the existence of polar and algebraic solutions was proved.

– The general structure of the higher order analogues of the first and second Painleve equations was determined.

– The explicit formulas of resonant polynomials and their roots for the hierarchies of the first and second Painlevé equations were obtained.

*Recommendations for use.*The work is theoretical in nature and is a contribution to the theory of differential equations with the Painlevé property. The results of the work are new and can be used in the analytic theory of differential equations. They can also be used in solving problems in theoretical and mathematical physics and for reading of special courses on the analytic theory of differential equations.