Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.95

ЛЯХОВ
Дмитрий Александрович

СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Гродно, 2013

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель:

Ломовцев Федор Егорович, доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты:

Корзюк Виктор Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси, заведующий кафедрой математической физики Белорусского государственного университета;

Кулеш Елена Евгеньевна, кандидат физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

Оппонирующая организация: **учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова»**.

Защита состоится 24.06.2013, в 12.00, на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко, 22, ауд. 209.

Телефон ученого секретаря: +(375)152 74-43-76; +(375)152 73-19-26.

Email: v.pronko@grsu.by, n.nech@grsu.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы».

Автореферат разослан 23.05.2013.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена разработке математических приемов исследования корректности по Адамару и гладкости *слабых решений* граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения переменных неограниченных операторов и гиперболических уравнений в частных производных с нестационарными граничными условиями по пространственным переменным. В случае переменных областей определения неограниченных операторов Ф.Е. Ломовцевым изучены корректность по Адамару и гладкость только *сильных решений* задачи Коши для гладких по времени полных гиперболических уравнений второго порядка[1], задачи Коши для кусочно-гладких по времени неполных гиперболических уравнений второго порядка с двучленной главной частью, граничных задач для гладких по времени гиперболических уравнений высших четных порядков[2] и в приложениях различных смешанных задач для гиперболических уравнений в частных производных при нестационарных граничных условиях в цилиндрических областях. Смешанные задачи для гиперболических уравнений в частных производных при стационарных граничных условиях и задачи граничного управления волновыми процессами в цилиндрических областях решались В.А. Ильиным, Е.И. Моисеевым и Л.И. Блошанской. Корректность по Адамару некоторых смешанных задач для гиперболических уравнений в частных производных второго порядка общего вида со стационарными граничными условиями в нецилиндрических областях установлена В.И. Корзюком.

Основным результатом диссертационного исследования является обобщение на слабые решения известного метода энергетических неравенств обоснования корректности по Адамару сильных решений. В диссертации теоремы существования, единственности и гладкости слабых решений граничных задач для гиперболических уравнений всех четных порядков и энергетическое неравенство слабых решений задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка доказываются сначала для главных частей этих уравнений. На уравнения с младшими частями они распространяются известным методом продолжения по параметру. Существование слабых решений показывается с помощью проекционной теоремы Ж.-Л. Лионса и сглаживающих операторов Иосиды–Ломовцева типа резольвенты. В их единственности убежда-

[1]Ломовцев, Ф.Е. Гладкость сильных решений полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторных коэффициентов / Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37, № 2. – С. 276–278.

[2]Ломовцев, Ф.Е. Полные гиперболические дифференциально-операторные уравнения высшего порядка с переменными областями определения гладких коэффициентов / Ф.Е. Ломовцев // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 6. – С. 44–48.

емся, применяя предложенные Ф.Е. Ломовцевым новые *сглаживающие граничные задачи*, которые не имеют вид резольвенты. Для доказательства теоремы гладкости слабых решений используются вспомогательные интегральные уравнения вместо вспомогательных краевых задач Ф.Е. Ломовцева для сильных решений. В диссертации, доказав сначала существование, единственность и затем теорему повышения гладкости слабых решений граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков по сравнению с работами Ф.Е. Ломовцева, удалось ослабить ограничения на неограниченные операторные коэффициенты с переменными областями определения для гладких решений. При обосновании существования и единственности глобальных слабых решений задачи Коши для полных гиперболических уравнений с переменными областями определения кусочно-гладких по времени операторов обобщен метод склейки глобальных слабых решений из локальных слабых решений, разработанный Ф.Е. Ломовцевым для гиперболических уравнений с неполной двучленой главной частью[3]. *Энергетическое неравенство* для глобальных слабых решений этой задачи Коши выводится методом Ф.Е. Ломовцева суммирования локальных энергетических неравенств для локальных слабых решений с помощью сопряженных условий согласования к условиям согласования для сильных решений в точках разрыва. С помощью энергетического неравенства доказывается, что при достаточной гладкости операторных коэффициентов по времени квадратично суммируемые по определению слабые решения задачи Коши в действительности являются непрерывно дифференцируемыми функциями времени в ослабленной операторной топологии. Проверкой требований доказанных абстрактных теорем показывается корректность во множестве слабых решений смешанных задач для гиперболических уравнений в частных производных при нестационарных граничных условиях. Смешанные задачи для гиперболических уравнений в частных производных и волнового уравнения с нестационарными граничными условиями служат математическими моделями нестационарных процессов акустики, колебаний, вибрации, упругости и других волнообразных процессов с изменяющимися во времени физическими свойствами среды и граничных режимов. В отличие от априорной оценки слабых решений, которую обеспечивает проекционная теорема Ж.-Л. Лионса, в приложениях левая часть полученного энергетического неравенства выражает полную энергию колеблющихся физических объектов в волновых процессах. Проведенное диссертационное исследование имеет важные физические

[3]Ломовцев, Ф.Е. Энергетическое неравенство и метод склейки слабых решений гиперболических уравнений с переменными областями определения кусочно-гладких операторов / Ф.Е. Ломовцев // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 448, № 3. – С. 261–265.

приложения и поэтому является *актуальным.*

В диссертации доказана корректность по Адамару во множестве слабых решений новых смешанных задач для гиперболических уравнений в частных производных при нестационарных граничных условиях и, в частности, смешанной задачи для гиперболического уравнения впервые возрастающих неограниченных порядков по пространственным переменным.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Работа выполнена на кафедре уравнений математической физики, переименованной в 2010 году в кафедру математической кибернетики, Белорусского государственного университета и проводилась в соответствии с заданиями научных программ, выполнявшихся в рамках:

— Научного совместного проекта Белорусского фонда фундаментальных исследований с Институтом математики НАН Украины, тема «Эволюционные и спектральные задачи для дифференциально-операторных уравнений и их приложения», № Ф07К-016 от 01 апреля 2007 г., номер госрегистрации № 20071654, срок выполнения 2007 г.–2009 г.

— ГПНИ «Конвергенция», тема «Метод энергетических неравенств в исследовании дифференциально -операторных уравнений, уравнений с частными производными и уравнений математической физики», № НИР-10 от 21.01.11 г., номер госрегистрации № 20113524, срок выполнения 2011 г.–2015 г.

Тема диссертации утверждена Ученым советом механико-математического факультета Белорусского государственного университета, протокол № 3 от 15 декабря 2009 г.

Цель и задачи исследования

Цель исследования – обобщение метода энергетических неравенств доказательства корректности по Адамару с класса сильных решений на случай слабых решений задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения кусочно-гладких по времени неограниченных операторных коэффициентов.

Цель обусловила постановку следующих *задач исследования*:

1. Исследовать корректность по Адамару в классе слабых решений задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничных задач для гиперболических

дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения гладких и кусочно-гладких по времени неограниченных операторных коэффициентов.

2. Изучить гладкость слабых решений задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения гладких по времени неограниченных операторных коэффициентов.

3. Обосновать корректность по Адамару в классе слабых решений новых смешанных задач для кусочно-гладких по времени гиперболических уравнений в частных производных при нестационарных граничных условиях.

Объектом исследования являются задача Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничные задачи для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения гладких и кусочно-гладких по времени неограниченных операторных коэффициентов.

Предмет исследования – корректность по Адамару и гладкость слабых решений задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения.

Научная новизна диссертационного исследования состоит в обобщении метода энергетических неравенств доказательства корректности с класса сильных решений на слабые решения граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков с зависящими от времени областями определения зависящих от времени неограниченных операторов. Обобщение включает применение новых сглаживающих граничных задач, не имеющих вид резольвенты, для доказательства единственности слабых решений уравнений четных порядков, использование интегральных вспомогательных уравнений для повышения гладкости слабых решений уравнений четных порядков и обобщение метода склейки на полные кусочно-гладкие по времени уравнения второго порядка.

Исследование имеет, в основном, теоретический характер и его *практическая значимость* заключается в обосновании корректности в классе слабых решений и выводе энергетического неравенства в ослабленной операторной топологии равномерной сходимости по времени впервые смешанной задачи для гиперболического уравнения в частных производных переменных неограниченных порядков по пространственным переменным, которая не корректна во множестве гладких решений. Его результаты могут быть использованы в учебном процессе и научных исследованиях в Белорусском, Витебском, Могилевском, Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском и Иркутском университетах, Институте математики НАН Беларуси, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН и Институте математики НАН Украины.

Положения, выносимые на защиту

1. Теоремы существования и единственности слабых решений задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения гладких и кусочно-гладких по времени неограниченных операторов.

2. Теоремы гладкости слабых решений задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения гладких по времени неограниченных операторов. Энергетическое неравенство слабых решений задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения кусочно-гладких по времени операторов.

3. Корректная в классе слабых решений смешанная задача для полного гиперболического уравнения в частных производных второго порядка по времени и неограниченно возрастающих порядков по пространственным переменным при нестационарных граничных условиях.

Личный вклад соискателя

Основные результаты диссертации получены лично соискателем. В совместных работах [1, 2, 4] научный руководитель Ф.Е. Ломовцев сформулировал цель и задачи исследования, предложил и доказал свойства сглаживающих краевых задач, участвовал в выборе методов исследования и обсуждении полученных результатов.

Апробация результатов диссертации

Результаты диссертационной работы докладывались на конференциях:

1) 65-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 13-16 мая 2008 года; 2) Международной научной конференции "X Белорусская математическая конференция", Минск, БГУ, 3-7 ноября 2008 года; 3) 66-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 18-21 мая 2009 года; 4) Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений"(AMADE-

2009), Минск, Беларусь, 14 - 19 сентября 2009 года; 5) 67-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 17-20 мая 2010 года; 6) XIV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям, "Еругинские чтения - 2011", Новополоцк, 12-14 мая 2011 года; 7) 68-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 16-19 мая 2011 года; 8) Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений"(AMADE-2011), Минск, Беларусь, 12 - 17 сентября 2011 года; 9) 69-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 14-17 мая 2012 года; 10) Международной научной конференции "XI Белорусская математическая конференция", Минск, БГУ, 5-9 ноября 2012 года;

и обсуждались на научных семинарах Белорусского государственного университета: кафедры математической кибернетики, кафедры функционального анализа механико-математического факультета, кафедры математической физики факультета прикладной математики и информатики.

Опубликованность результатов диссертации

Результаты диссертации представлены в 12 научных работах, в том числе в 4 статьях в рецензируемых научных журналах из перечня научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований, 6 тезисах докладов международных научных конференций и 2 электронных ресурсах. Общее количество опубликованных материалов составляет 3,2 авторского листа, из них 1,85 авторского листа в изданиях, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 112 страницах машинописного текста и состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка на 12 страницах, включающего 113 наименований, в том числе 12 публикаций автора по теме диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, указана принципиальная новизна результатов диссертации.

Первая глава содержит определения гладких, сильных и слабых решений гиперболических дифференциально-операторных уравнений, аналитический обзор работ по теме диссертации, сравнительный анализ известных и полученных результатов и основные методы диссертационного исследования.

Во **второй главе** доказывается корректность по Адамару в классе слабых решений и изучается гладкость слабых решений задачи Коши для полного гиперболического дифференциально-операторного уравнения

$$\mathcal{L}(t)u \equiv \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{d(B(t)u(t))}{dt} + A(t)u(t) +$$

$$+ \frac{d(B_0(t)u(t))}{dt} + A_0(t)u(t) = f(t),\ t \in]0,T[, \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = u_1, \qquad (2)$$

где $A(t)$ – кусочно-гладкие по t, самосопряженные положительные операторы в гильбертовом пространстве H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$; $B(t)$ – линейные дифференцируемые по t, неограниченные замкнутые операторы в H с зависящими от t областями определения $D(B(t))$; $A_0(t)$ – линейные неограниченные замкнутые операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_0(t))$, подчиненные квадратному корню $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$; $B_0(t)$ – линейные дифференцируемые по t, ограниченные операторы в H, наделенном скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$.

Обозначим пространства $\mathcal{H}^+ = L_2(]0,T[, H_t^+)$, $\mathcal{H} = L_2(]0,T[, H)$, $\mathcal{H}^- = L_2(]0,T[, H_t^-)$, где H_t^- – антидвойственные банаховы пространства к гильбертовым пространствам H_t^+ – областям определения $D(A^{1/2}(t))$ квадратного корня $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$ с эрмитовыми нормами $[\cdot]_{(t)} = \left|A^{1/2}(t)\cdot\right|$.

Определение 2.1. *Функция $u \in \mathcal{H}$ называется слабым решением задачи Коши* (1), (2) *для правой части $f \in \mathcal{H}^-$ и начальных данных $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$, если для нее справедливо тождество*

$$\int_0^T \left(u, \frac{d^2\varphi}{dt^2} - B^*(t)\frac{d\varphi}{dt} + A(t)\varphi - B_0^*(t)\frac{d\varphi}{dt} + A_0^*(t)\varphi\right) dt =$$

$$= \int_0^T \langle f, \varphi\rangle_{(t)}\, dt + \langle u_1, \varphi(0)\rangle_{(0)} - \left(u_0, \frac{d\varphi(0)}{dt}\right) +$$

$$+ (u_0, B^*(0)\varphi(0)) + (u_0, B_0^*(0)\varphi(0))\ \forall \varphi \in \Phi,$$

где множество $\Phi = \{\varphi \in \mathcal{H} : \varphi(t) \in D(A(t)), d\varphi(t)/dt \in D(B^*(t))$, $t \in [0,T]$; $d^i\varphi/dt^i$, $A(t)\varphi$, $B^*(t)(d\varphi/dt) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$; $\varphi(T) = d\varphi(T)/dt = 0\}$, $B^*(t)$, $B_0^*(t)$, $A_0^*(t)$ – сопряженные операторы в H к операторам $B(t)$, $B_0(t)$, $A_0(t)$ соответственно, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(t)}$ – полуторалинейная форма антидвойственности между пространствами H_t^+ и H_t^-.

Для упрощения изложения доказываются теоремы существования, единственности, повышения гладкости и выводится энергетическое неравенство слабых решений задачи Коши сначала для главной части уравнения (1):

$$\mathcal{L}_0(t)u \equiv \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{d(B(t)u(t))}{dt} + A(t)u(t) = f(t), t \in]0,T[. \tag{3}$$

Теорема 2.1 [1, 11]. *Пусть при каждом $t \in [0,T]$ операторы $A(t)$ самосопряжены и положительны на $D(A(t))$ в H и удовлетворяют условиям:*

A_1. При всех $t \in [0,T]$ существуют их ограниченные обратные операторы $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$, которые в H сильно непрерывны по t и имеют ограниченную сильную производную $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$ такую, что

$$\big((dA^{-1}/dt)g,g\big) \le c_1(A^{-1}(t)g,g) \;\; \forall g \in H, \quad c_1 \ge 0; \tag{4}$$

B_1. При почти всех $t \in]0,T[$ сопряженные операторы $B^*(t)$ к операторам $B(t)$ подчинены операторам $A^{1/2}(t)$ в H, т.е. их области определения $D\left(A^{1/2}(t)\right) \subset D\left(B^*(t)\right)$ и ограничены операторы $B^*\left(t\right)A^{-1/2}(t) \in L_\infty\left(]0,T[,L(H)\right)$, и также предполагается выполненным неравенство

$$-\mathrm{Re}\left(B^*(t)v,v\right) \le c_2\left|v\right|^2 \;\; \forall v \in D\left(B^*(t)\right), c_2 \ge 0,$$

где постоянные c_1, $c_2 \ge 0$ не зависят от g, v и t.

Тогда для каждых $f \in \mathcal{H}^-$, $u_0 \in H$ и $u_1 \in H_0^-$ существует слабое решение $u \in \mathcal{H}$ задачи Коши (3), (2).

Для доказательства этой и других теорем существования слабых решений используется проекционная теорема 2.2 Ж.-Л. Лионса[4]. С помощью лемм 2.1–2.3, которые являются аналогами лемм 3.1–3.3 для новой сглаживающей задачи (15), (16) при $m=1$ и операторе $J(t) = -d/dt$ с областью определения $D(J) = \{h \in \mathcal{H} : dh/dt \in \mathcal{H},\, h(T)=0\}$, доказывается следующая

Теорема 2.3 [1, 11]. *Пусть выполняются предположения теоремы 2.1 и следующие условия:*

A_2. При всех $t \in [0,T]$ в H существует ограниченная вторая сильная производная $d^2A^{-1}(t)/dt^2 \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$ операторов $A^{-1}(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$\left|\big((d^2A^{-1}(t))/dt^2 g,v\big)\right| \le c_3\left|v\right|\left|A^{-1/2}(t)g\right| \;\; \forall g,v \in H, \;\; c_3 \ge 0; \tag{5}$$

[4]Lions, J.-L. Equations differentielles operationnelles et problemes aux limites / J.-L. Lions. – Berlin : Springer – Verlag, 1961. – 292 p.

B_2. В H ограничены операторы $B^*(t)A^{-1}(t)$, $B^*(t)\left(dA^{-1}(t)/dt\right) \in$ $\in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$ и справедливы неравенства

$$\left|\left(B^*(t)\left(dA^{-1}(t)/dt\right)g,v\right)\right| \le c_4\,|g|\,|A^{-1/2}(t)v| \;\forall g,v\in H,\; c_4\ge 0,$$

$$\operatorname{Re}(B^*(t)u,A(t)u) \le c_5|A^{1/2}(t)u|^2 \;\forall u\in D(A(t)),\; c_5\ge 0, \tag{6}$$

где постоянные c_i, $i=\overline{3,5}$, не зависят от g,v,u и t.

Тогда для всех $f\in\mathcal{H}^-$, $u_0\in H$, $u_1\in H_0^-$ слабые решения задачи Коши (3), (2) единственны.

Обобщением предложенного Ф.Е. Ломовцевым метода вспомогательной задачи проводится повышение гладкости слабых решений уравнения (3).

Теорема 2.4 [2, 6]**.** *Пусть выполняются требования теоремы 2.3, а также справедливо неравенство (4) со знаком минус в его левой части и неравенство*

$$\left|\left((dA^{-1}(0)/dt)g,h\right)\right| \le c_6\,|g|\left|A^{-1/2}(0)h\right| \forall g,h\in H.$$

Если еще выполняется неравенство (6) с $B(t)$ вместо $B^*(t)$ и условие

B_3. При всех $t\in[0,T]$ в H существует производная $dB(t)/dt$, подчиненная операторам $A^{1/2}(t)$ и ограничены операторы $B(t)d(A^{-1}(t))/dt\in\mathcal{B}(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, для которых верно неравенство

$$\left|\left([d(B(t)A^{-1}(t))/dt]g,h\right)\right| \le c_7\,|g|\left|A^{-1/2}(t)h\right| \;\forall g,\,h\in H,\; c_6\ge 0, \tag{7}$$

где постоянные c_6, $c_7\ge 0$ не зависят от g, h, t.

то для всех $f\in\mathcal{H}^+$, $u_0\in D(A(0))$, $u_1\in D(A^{1/2}(0))$ слабые решения $u\in\mathcal{H}$ задачи Коши (1), (2) являются ее гладкими решениями, т.е.

$$u(t)\in D(A(t)),\; t\in[0,T];\; \frac{d^iu}{dt^i}, \frac{d(B(t)u)}{dt}, A(t)u\in\mathcal{H},\;\; i=1,\,2.$$

В замечании 2.3 указано, что полученные ранее априорные оценки для слабых решений задачи (1), (2) не являются энергетическими, так как не выражают полную энергию колебаний. В замечании 2.4 сравниваются полученные результаты по гладкости слабых решений с известными результатами по гладкости сильных решений. Выведено энергетическое неравенство для слабых решений задачи Коши сначала для гладкого по t уравнения (3).

Теорема 2.5. *Пусть верны предположения теоремы 2.4, неравенство (6) со знаком минус в левой части и условие*

B_4. При почти всех $t\in]0,T[$ операторы $B(t)$ имеют в H ограниченную сильную производную $dB(t)/dt\in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H_t^+,H))$, которая удовлетворяет неравенству

$$\left|\left(\frac{dB(t)}{dt}v, A(t)w\right)\right| \le c_{13}\,|v|\left|A^{1/2}(t)w\right|, \forall v,\,w\in D(A(t)),\; c_{13}\ge 0, \tag{8}$$

где постоянная c_{13} *не зависит от* v, w, t.

Тогда для каждых $f \in \mathcal{H}^-$, $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$ *существует единственное локальное слабое решение* $u \in \mathcal{H}$ *задачи Коши* (3), (2)*, удовлетворяющее энергетическому неравенству*

$$\sup_{0<t<T}\left(\left[\frac{du(t)}{dt}\right]^2_{(-t)} + |A^{1/2}(t)u(t)|^2_{(-t)}\right) \leq$$

$$\leq e^{\widehat{c}T}\left(\int\limits_0^T [f(t)]^2_{(-t)}dt + |u_0|^2 + [u_1]^2_{(-0)}\right). \quad (9)$$

Стандартным методом продолжения по параметру установлено

Следствие 2.1. *Утверждение теоремы 2.5 (возможно с большей постоянной* $\widehat{c}$*) справедливо для полного уравнения* (1) *с гладкими по* t *операторами, если ограничены операторы* $B_0(t)$, $dB_0(t)/dt \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, $A_0(t) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H_t^+,H))$ *и их расширения по непрерывности* $\overline{B}_0(t)$, $d\overline{B}_0(t)/dt \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H_t^-))$, $\overline{A}_0(t) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H,H_t^-))$.

Обобщением метода склейки Ф.Е. Ломовцева из локальных слабых решений задачи Коши (3), (2) на частичных интервалах I_k строятся ее глобальные слабые решения на всем интервале $I_0 = [0,T]$.

Теорема 2.6 [3, 8]**.** *Пусть выполняются условия:*

$\tilde{A}_1$. *Интервал* $I_0 = [0,T[$ *разбит на конечное или счетное множество последовательных взаимно непересекающихся интервалов* $I_k = [t_k, t_{k+1}[$, $k = \overline{1,K}$, $t_1 = 0$, $t_{K+1} = T$, $K < +\infty$ *или* $K = +\infty$. *Самосопряженные и положительные операторы* $A(t)$ *и неограниченные замкнутые операторы* $B(t)$ *удовлетворяют всем требованиям теорем 2.1, 2.3 – 2.5 на каждом интервале* I_k *в отдельности вместо интервала* I_0 *и, в частности, при почти всех* $t \in I_0$ *выполняются неравенства* (4), (5), (7), (8)*, но сопряженные операторы* $B^*(t)$ *слабо непрерывны по* t *в* H *на всем интервале* I_0.

$\tilde{A}_2$. *Для каждых двух соседних интервалов* I_{k-1} *и* I_k *в их общей граничной точке* t_k *выполняется равномерное по* k *непрерывное вложение* $H^-_{t_k-0} \subset H^-_{t_k}$, *т.е. существует общая не зависящая от* v, *и* t *постоянная* $c_{14} > 0$, *что* $[v]_{(-t_k)} \leq c_{14}[v]_{(-(t_k-0))}\ \forall\, v \in H^-_{t_k-0}$, $k = \overline{2,K}$.

Тогда для любых $f \in \mathcal{H}^-$, $u_0 \in H$, $u_1 \in H_0^-$ *существуют единственные слабые решения* $u \in \mathcal{H}^-$ *задачи Коши* (3), (2)*, удовлетворяющие энергетическому неравенству* (9) *из теоремы 2.5.*

В классе слабых решений задача Коши (1), (2) не решается последовательно по интервалам I_k гладкости $A^{-1}(t)$, потому что квадратично-суммируемые локальные слабые решения на предыдущих интервалах не имеют следов для начальных данных на последующих интервалах. В замечании 2.5 показывается, что условия вложения негативных пространств $H^-_{t_k-0} \subset H^-_{t_k}$ являются сопряженными к известным условиям для сильных решений.

Следствие 2.2. *Если выполняются предположения следствия 2.1 и теоремы 2.6, то ее утверждение вместе с энергетическим неравенством* (9) *(возможно с некоторой большей постоянной $\hat{c}^*$, чем $\hat{c}$) имеет место для полного гиперболического дифференциально-операторного уравнения*

$$\mathcal{L}_0(t) + B_0(t)\frac{du(t)}{dt} + A_0(t)u(t) = f(t), t \in]0, T[,$$

с кусочно-гладкими по t операторными коэффициентами при начальных условиях (2).

В качестве приложения абстрактной теории доказана корректность смешанной задачи для уравнения в частных производных неограниченно возрастающих порядков по пространственным переменным. В ограниченном цилиндре $G = \Omega \times]0, 1[\subset \mathbb{R}^{n+1}$ независимых переменных t и $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ с гладкой границей $S \in C^\infty$ области Ω изучено уравнение

$$u_{tt}(x,t) + \sum_{j=0}^{p(t_1)} b_j(x)\nabla_x^j u_t(x,t) + \sum_{i=0}^{p(t)} a_i(t)(-\Delta_x)^i u(x,t) +$$

$$+ b_0(x,t)u_t(x,t) + \sum_{|\alpha| \le p(t)} a_{0,\alpha}(x,t)D^\alpha u(x,t) = f(x,t),$$

$$t \in I_k = \left[\frac{k-1}{k}, \frac{k}{k+1}\right[, \ k = 1, 2, ..., \tag{10}$$

где $b_j(x)$ – один раз непрерывно дифференцируемые функции на замыкании $\overline{\Omega}$, обращающиеся в нуль на границе S, $a_i(t)$ – кусочно-постоянные, равномерно по i ограниченные функции на отрезке $[0, 1]$ с точками разрыва $t_k, k = 2, ...,$ первого рода, $p(t)$ – целочисленная, положительная, возрастающая, непрерывная справа по t функция, равная единице на интервале I_1, $b_0(x,t), a_{0,\alpha}(x,t)$ – измеримые и ограниченные функции в G.

К уравнению (10) присоединяются разрывные по t граничные условия

$$\Delta_x^i u(x',t) = 0, \ \ x' \in S_0, \frac{\partial\left(\Delta_x^i u(x',t)\right)}{\partial\nu} = 0, \ \ x' \in S \backslash S_0,$$

$$i = \overline{0, p(t)-1}, \ \ t \in I_k, \ k = 1, 2, ..., \tag{11}$$

где ν – внешняя нормаль к поверхности S и $S_0 \subseteq S$, и начальные условия

$$u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x), \ \ x \in \Omega. \tag{12}$$

Пусть $W_2^{-p(t)}(\Omega)$ – антидвойственные банаховы пространства с нормами $\langle\cdot\rangle_{-p(t)}$ к гильбертовым пространствам $W_2^{p(t)}(\Omega)$, полученным замыканием всех функций $v(x)\in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющих условиям (11), по норме

$$\langle v\rangle_{p(t)}=\left(\sum_{j=0}^{[p(t)/2]}\int\limits_{\Omega}\left|\Delta_x^j v(x)\right|^2dx+\sum_{j=0}^{[(p(t)-1)/2]}\int\limits_{\Omega}\left|\nabla_x\Delta_x^j v(x)\right|^2dx\right)^{1/2},\ \ t\in I_k,$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа.

Проверкой предположений теоремы 2.6 доказывается

Теорема 2.7 [7, 10]. *Для любых* $f\in L_2\left(]0,T],W_2^{-p(t)}(\Omega)\right)$, $u_0\in L_2(G)$, $u_1\in W_2^{-p(0)}(\Omega)$ *смешанная задача* (10) – (12) *имеет единственные слабые решения* $u\in L_2(G)$, *удовлетворяющие при некоторой* $c_{15}>0$ *неравенству*

$$\sup_{0<t<T}\int\limits_{\Omega}\left([u_t(x,t)]^2_{(-t)}+|u(x,t)|^2\right)dx\le$$

$$\le e^{c_{15}T}\left[\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}[f(x,t)]^2_{(-t)}\,dxdt+\int\limits_{\Omega}\left(|u_0(x)|^2+[u_1(x)]^2_{(-0)}\right)dx\right],$$

где $[\cdot]_{(-t)}=\left|A^{-1/2}(t)\cdot\right|$ *и* $A(t)=\sum_{|\alpha|\le p(t)}a_{0,\alpha}(x,t)D^\alpha$ *с условиями* (11).

В замечании 2.6 доказывается не корректность по Адамару смешанной задачи (10) – (12) во множестве гладких решений.

В **третьей главе** рассматривается дифференциально-операторное уравнение

$$\mathcal{L}_m(t)u\equiv(-1)^{m-1}\frac{d^{2m}u(t)}{dt^{2m}}+\lambda_mA(t)u(t)=f(t),\ \lambda_m>0,\ t\in]0,T[,\qquad(13)$$

при граничных условиях

$$\frac{d^iu(0)}{dt^i}=\frac{d^ju(T)}{dt^j}=0,\ i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,m-2},\ m=1,2,...\qquad(14)$$

Определение 3.1. *Функция* $u\in\mathcal{H}$ *называется слабым решением граничных задач* (13), (14) *для правой части* $f\in\mathcal{H}^-$, *если она удовлетворяет интегральному уравнению*

$$\int\limits_0^T\left(u,(-1)^{m-1}\frac{d^{2m}\varphi}{dt^{2m}}+\lambda_mA(t)\varphi\right)dt=\int\limits_0^T\langle f,\varphi\rangle_{(t)}\,dt\ \forall\varphi\in\Phi_m,$$

где множества $\Phi_m = \big\{\varphi \in \mathcal{H} : \varphi(t) \in D(A(t)), t \in [0,T], d^k\varphi/dt^k, td^{2m}\varphi/dt^{2m}, A(t)\varphi \in \mathcal{H}, k = \overline{1,2m-1}, d^i\varphi(0)/dt^i = d^j\varphi(T)/dt^j = 0, i = \overline{0,m-2}, j = \overline{0,m}\big\}$ *и под символом* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(t)}$ *понимается полуторалинейная форма двойственности между пространствами* H_t^+ *и* H_t^-.

Теорема 3.1 [4, 12]. *Пусть операторный коэффициент* $A(t)$ *удовлетворяет условию* A_1 *теоремы 2.1. Тогда существуют* $\lambda_1^{(1)} = 0$ *при* $m = 1$ *и* $\lambda_m^{(1)} > 0$ *при* $m = 2, 3, ...,$ *такие, что при всех* $\lambda_m > \lambda_m^{(1)}$, $m = 1, 2, ...,$ *и для каждых* $f \in \mathcal{H}^-$ *существуют слабые решения* $u \in \mathcal{H}$ *граничных задач* (13), (14).

Для доказательства единственности слабых решений этих задач применены новые сглаживающие операторы, дающие решения краевых задач:

$$\mathcal{P}_m v_\delta \equiv (-1)^m\{d^{m-1}\left[e^{ct}(d^m v_\delta/dt^m)\right]/dt^{m-1}\} = J_\delta^{-1}(t)u,\ c \geq 0,\ \delta > 0, \quad (15)$$

$$d^i v_\delta(0)/dt^i = d^j v_\delta(T)/dt^j = 0,\ i = \overline{0,m-2},\ j = \overline{0,m-1},\ m = 1,\ 2, ..., \quad (16)$$

где $J_\delta^{-1}(t) = (I + \delta J(t))^{-1}$, $\delta > 0$, $J(t) = -t(d/dt) + (m-1)$ – операторы с областями определения $D(J) = \{h \in \mathcal{H} :\ t(dh/dt) \in \mathcal{H},\ h(T) = 0\}$. По лемме 3.1 справедливо предельное сглаживающее свойство: $J_\delta^{-1}(t)g \to g\,\forall g \in \mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$ при $\delta \to 0$. Согласно лемме 3.2 для $\forall u \in \mathcal{H}$ существуют конечные постоянные $\hat{c}_{j+3} > 0$, что для решений $v_\delta \in \mathcal{H}$ задач (15), (16) равномерно по $\delta > 0$ в $\mathcal{H}$ ограничены производные: $\|d^i v_\delta/dt^i\|_0 \leq \hat{c}_{j+3}$, $\delta > 0$, $j = \overline{0,2m-1}$, $m = 1,\ 2, ...$ В силу леммы 3.3 при $\forall u \in \mathcal{H}$ для решений $v_\delta \in \mathcal{H}$ задач (15), (16) последовательности $\delta\|t\{d^m[e^{ct}(d^m v_\delta/dt^m)]/dt^m\}\|_0 \to 0$, $m = 1, 2, ...,$ при $\delta \to 0$, где $\|\cdot\|_0$ – норма в $\mathcal{H}$. В доказательстве следующей теоремы единственности также используются интерполяционные неравенства специального вида из леммы 3.4.

Пусть гильбертовы пространства $W^\alpha(t)$ – множества значений дробных степеней $A^{\alpha/2m}(t)$ операторов $A^{-1}(t)$ с эрмитовыми нормами $|\cdot|_{\alpha,t} = \left|A^{\alpha/2m}(t)\cdot\right|$, $|\alpha| \leq 2m$.

Теорема 3.2 [4]. *Пусть выполняются предположения теоремы 3.1, производная* $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}\left([0,T], \mathcal{L}\left(H, W^{2m-1}(t)\right)\right) \cap \mathcal{B}\left([0,T], \mathcal{L}\left(W^{-2m}(t), W^{-1}(t)\right)\right)$ *и следующее условие*

A_4. *При всех* $t \in [0,T]$ *в* H *существуют сильные производные* $d^iA^{-1}(t)/dt^i \in L_\infty(]0,T[, \mathcal{L}(H))$, $i = \overline{1,2m}$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\left|\left(\frac{d^iA^{-1}(t)}{dt^i}g, h\right)\right| \leq c_i\,|g|_{-(m+1-i),t}\,|h|_{-m,t}\ \ \forall g,h \in H,\ i = \overline{2,m},$$

$$\left|\left(\frac{d^iA^{-1}(t)}{dt^i}g, h\right)\right| \leq c_i\,|g|\,|h|_{-m,t}\ \ \forall g,h \in H,\ i = \overline{m+1,2m},$$

где постоянные c_i не зависят от g, h и t.

Тогда существуют $\lambda_1^{(2)} = \lambda_1^{(1)} = 0$ при $m = 1$ и $\lambda_m^{(2)} \geq \lambda_m^{(1)}$ при $m = 2, 3, \ldots$, такие, что при всех $\lambda_m > \lambda_m^{(2)}$ для любых $f \in \mathcal{H}^-$ слабые решения $u \in \mathcal{H}$ граничных задач (13), (14) *единственны.*

Следствие 3.1. *Если выполняются условия теоремы 3.2, то существуют постоянные $\hat{c}_m^* > 0$, что при всех $\lambda_m \geq \lambda_m^{(2)}$ для всех $f \in \mathcal{H}^-$ существуют единственные слабые решения $u \in \mathcal{H}^-$ граничных задач (3.1), (3.2), удовлетворяющие априорной оценке*

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2 \, dt \leq \hat{c}_m^* \int\limits_0^T [f(t)]_{(-t)}^2 \, dt, \; m = 1, 2, \ldots,$$

где $[\cdot]_{(-t)}$ – нормы антидвойственных пространств H_t^-.

Отсюда методом продолжения по параметру устанавливается

Следствие 3.2. *Теоремы 3.1 и 3.2 (возможно с большими значениями $\lambda_m^{(1)}$ и $\lambda_m^{(2)}$ соответственно) верны для уравнений с младшей частью*

$$(-1)^{m-1} \frac{d^{2m} u(t)}{dt^{2m}} + \lambda_m A(t) u(t) + A_0(t) u(t) = f(t), \;\; t \in]0, T[,$$

где $A_0(t) \in L_\infty\left(]0, T[, \mathcal{L}(H, H_t^-)\right)$ – линейные ограниченные операторы из H в H_t^-.

При более гладких правых частях $f \in \mathcal{H}$ повышается гладкость слабых решений $u \in \mathcal{H}$ граничных задач (13), (14). Теорема гладкости доказывается методом вспомогательной краевой задачи.

Определение 3.2. *Функция $w \in \mathcal{H}$ называется слабым решением вспомогательных задач к граничным задачам* (13), (14) *для $\tilde{f} \in \mathcal{H}^-$, если она является решением уравнений*

$$\int\limits_0^T \left(A^{-1}(t) w, (-1)^{m-1} \frac{d^{2m} w}{dt^{2m}} + \lambda_m A(t) \varphi \right) dt = \int\limits_0^T \left\langle \tilde{f}, \varphi \right\rangle_{(t)} dt, \; m = 1, 2, \ldots,$$

для любой функции φ множества Φ_m из определения 1.

Теорема 3.3 [4]. *Если справедливы предположения теоремы 3.2, выполняется неравенство* (4) *с минусом в левой части и сильные производные $d^j A^{-1}(t)/dt^j \in L_\infty\left(]0, T[, \mathcal{L}\left(W^{-m+j}(t), H\right)\right)$, $j = \overline{1, m-1}$, то для всех $f \in \mathcal{H}$ слабые решения $u \in \mathcal{H}$ граничных задач* (13), (14) *обладают следующими свойствами*

$$u(t) \in D(A(t)), \, t \in [0, T], \;\; \frac{d^k u}{dt^k}, \;\; A(t) u \in \mathcal{H}, \;\; k = \overline{1, m-2}, \;\; m > 1;$$

$$u(t) \in D(A^{1/2}(t)),\ t \in [0,T],\ \ A^{1/2}(t)u \in \mathcal{H},\ \ m=1.$$

В замечаниях 2.1 и 3.1 проведено сравнение полученных нами результатов для слабых решений с результатами, полученными Ф.Е. Ломовцевым, С.П. Ходос, Н.А. Хатимцовым и другими для сильных решений. В замечаниях 2.2 и 3.2 говорится, что достаточные условия теорем 2.2, 2.3, 3.1 и 3.2 являются сопряженными к достаточным условиям существования и единственности ее сильных решений в работах Ф.Е. Ломовцева. В замечании 3.3 отмечено, что требования теоремы 3.3 при $m=1$ на $A(t)$ менее жесткие, чем в теореме 2.5, гарантирующей один раз непрерывную дифференцируемость по t слабых решений $u \in \mathcal{H}$ задачи (1), (2) в ослабленной топологии равномерной сходимости $u \in C^1([0,T],\mathcal{H}_t^-)$ даже для $f \in \mathcal{H}^-$.

В качестве приложения абстрактной теории в прямоугольнике $G =]0,l[\times]0,1[$ независимых переменных t и x решается уравнение

$$-u_{tttt}(x,t) + \lambda_2 u_{xxxx}(x,t) + a_0(x,t)u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ \{x,t\} \in G, \qquad (17)$$

где $\lambda_2 > 0-$ весовой коэффициент. К этому уравнению присоединяются гладкие по времени $t \in [0,1]$ граничные условия по x

$$u_{xxx}(0,t) + \beta_1(t)u(0,t) = 0,\ u_{xxx}(l,t) - \beta_2(t)u(l,t) = 0,$$

$$u_{xx}(0,t) - \beta_3(t)u_x(0,t) = 0,\ u_{xx}(l,t) + \beta_4(t)u_x(l,t) = 0, \qquad (18)$$

где коэффициенты $\beta_i(t) \geq 0,\ i = \overline{1,4}$, и граничные условия по t

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0,\ \ u(x,T) = 0,\ \ x \in]0,l[. \qquad (19)$$

Пусть $W_2^{-2,t}(\Omega)$ – антидвойственные банаховы пространства с нормами $\langle\cdot\rangle_{-2,t}$ к гильбертовым пространствам $W_2^{2,t}(\Omega)$, полученным замыканием всех функций $v(x) \in C^4\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющих условиям (18), по нормам

$$\langle v\rangle_{2,t} = \|A^{1/2}(t)v\|_0 = \Bigg[\beta_1(t)|v(0)|^2 + \beta_2(t)|v(l)|^2 +$$

$$+\beta_3(t)|v_x(0)|^2 + \beta_4(t)|v_x(l)|^2 + \int_0^l |v_{xx}(x)|^2 dx\Bigg]^{1/2},\ t \in [0,1].$$

Проверкой предположений теоремы 3.2 доказывается

Теорема 3.4 [4]. *Пусть коэффициенты граничных условий* $\beta_i(t) \in C^4[0,1],\ \beta_i(t) \geq 0,\ \ i = \overline{1,4},$ *и уравнения* $a_0(x,t) \in L_\infty(G)$. *Тогда существует* $\lambda_2^{(3)} > 0$ *такое, что при всех* $\lambda_2 > \lambda_2^{(3)}$ *и для любых*

$f \in L_2\big(]0,1[, W_2^{-2,t}(\Omega)\big)$, *смешанная задача* (17) – (19) *имеет единственные слабые решения* $u \in L_2(G)$, *удовлетворяющие априорной оценке*

$$\int_0^1 \int_0^l |u(x,t)|^2 \, dxdt \leq \hat{c}_2^* \int_0^1 \int_0^l [f(x,t)]_{(-t)}^2 dxdt, \; \hat{c}_2^* > 0,$$

где нормы $[\cdot]_{(-t)} = \left|A^{-1/2}(t) \cdot\right|$.

Автор благодарит своего научного руководителя Федора Егоровича Ломовцева за постановку задач, помощь, поддержку и внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. В диссертации обобщением метода энергетических неравенств исследования корректности по Адамару для сильных решений на слабые решения доказаны теоремы существования и единственности слабых решений:

– задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения кусочно-гладких по времени неограниченных операторов [1, 3, 8, 11];

– граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения гладких по времени неограниченных операторов [4, 12].

2. Методом вспомогательного интегрального уравнения, а также обобщением метода склейки слабых решений соответственно получены теоремы гладкости слабых решений задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения операторов, а также выведено энергетическое неравенство для слабых решений задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения кусочно-гладких по времени операторов [2, 4, 6, 9].

3. Проверкой требований доказанных абстрактных теорем показана корректность по Адамару в классе слабых решений смешанных задач для

– гиперболического уравнения в частных производных второго порядка по времени и неограниченно возрастающих порядков по пространственным переменным при нестационарных граничных условиях [5, 7, 10];

– гиперболического уравнения в частных производных четвертого порядка при нестационарных граничных условиях [4].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации следует использовать в исследовании корректности и гладкости слабых решений разрывных по времени граничных задач для гиперболических дифференциальных уравнений с переменными областями определения операторов и краевых задач для гиперболических уравнений в частных производных с нестационарными граничными условиями.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных рецензируемых журналах

1. Ляхов, Д.А. О слабых решениях задачи Коши для гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменной областью определения / Д. А. Ляхов, Ф. Е. Ломовцев // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 1. – С. 44–49.

2. Ляхов, Д.А. Метод слабых решений вспомогательной задачи Коши для исследования гладкости решений гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения / Д.А. Ляхов, Ф.Е. Ломовцев // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2010. – № 2. – С. 75–82.

3. Ляхов, Д.А. Слабые решения гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменными областями определения разрывных операторов / Д.А. Ляхов // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 2. – С. 76–80.

4. Ляхов, Д. А. Слабые решения гиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения / Ф.Е. Ломовцев, Д.А. Ляхов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 67–73.

Тезисы докладов научных конференций

5. Ляхов, Д.А. Слабые решения уравнения колебаний струны при зависящем от времени коэффициенте упругого закрепления конца / Д.А. Ляхов, Ф.Е. Ломовцев // X Белорусская математическая конференция : тезисы докладов международной научной конференции, Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. : в 5 ч. / ИМ НАН Беларуси. – Минск, 2008. – Ч. 2. – С. 91–92.

6. Ляхов, Д.А. Теорема гладкости слабых решений гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения / Д.А. Ляхов, Ф.Е. Ломовцев // Ана-

литические методы анализа и дифференциальных уравнений : тезисы докладов международной конференции, Минск, 14 – 19 сент. 2009 г. / ИМ НАН Беларуси. – Минск, 2009. – С. 101.

7. Ляхов, Д.А. Корректно поставленная краевая задача для гиперболического уравнения в частных производных возрастающего порядка / Д.А. Ляхов, Ф.Е. Ломовцев // Еругинские чтения – 2011 : тезисы докладов XIV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 12 – 14 мая 2011 г. / ПГУ. – Новополоцк, 2011. – С. 106-107.

8. Ляхов, Д.А. О слабых решениях разрывного гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменными областями / Д.А. Ляхов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тезисы докладов международной конференции, Минск, 12 – 17 сентября 2011 г. / ИМ НАН Беларуси. – Минск, 2011. – С. 98.

9. Ляхов, Д. А. Склейка слабых решений полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения кусочно-гладких операторов / Ф.Е. Ломовцев, Д.А. Ляхов // XI Белорусская математическая конференция : тезисы докладов международной научной конференции, Минск, 5 – 9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / ИМ НАН Беларуси. – Минск, 2012. – Ч. 2. – С. 75–76.

10. Ляхов, Д. А. Смешанная задача для разрывного гиперболического уравнения в частных производных бесконечного порядка с граничными условиями типа Неймана / Ф.Е. Ломовцев, Д.А. Ляхов // XI Белорусская математическая конференция : тезисы докладов международной научной конференции, Минск, 5 – 9 ноября 2012 г. : в 5 ч. / ИМ НАН Беларуси. – Минск, 2012. – Ч. 2. – С. 76–77.

Электронные ресурсы

11. Ляхов Д.А. Слабые решения гиперболического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с переменными областями определения / Д.А. Ляхов // Сборник работ 65-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета, Минск, 13 – 16 мая 2008 г. : в 3 ч. [Электронный ресурс] / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2008. – Ч. 2. – С. 59–63. – Режим доступа : http://www.nirs.bsu.by/Документы/Конференция%20БГУ/

65конференция/ТОМ2 _ 65.pdf. – Дата доступа : 01.09.2012.

12. Ляхов Д.А. Теорема существования слабых решений гиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения операторных коэффициентов / Д.А. Ляхов // Сборник работ 69-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета, Минск, 14 – 17 мая 2012 г. : в 3 ч. [Электронный ресурс] / Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2012. – Ч. 1. – С. 104–108. – Режим доступа : http://www.nirs.bsu.by/Документы/Конференция%20БГУ/69конференция/ТОМ1 _ 69.pdf. – Дата доступа : 01.09.2012.

РЭЗЮМЭ

Ляхаў Дзмітры Аляксандравіч

Слабыя рашэнні гіпербалічных дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў з зменнымі абсягамі вызначэння

Ключавыя словы. Дыферэнцыяльна-аператарныя раўнанні, зменны абсяг вызначэння, слабыя рашэнні, метад злепвання.

Аб'ект і прадмет даследавання. *Аб'ектам даследавання* з'яўляюцца задача Кашы для поўных гіпербалічных дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў другога парадку і межавыя задачы для гіпербалічных дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў вышэйшых цотных парадкаў з зменнымі абсягамі вызначэння гладкіх і кавалкава-гладкіх па часу неабмежаваных аператарных каэфіцыентаў. *Прадмет даследавання* - карэктнасць і гладкасць слабых рашэнняў задачы Кашы для поўных гіпербалічных дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў другога парадку і межавых задач для гіпербалічных дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў вышэйшых цотных парадкаў з зменнымі абсягамі вызначэння.

Мэта работы. Абагульненне метаду энергетычных няроўнасцей доказы карэктнасці па Адамару з класа моцных рашэнняў на выпадак слабых рашэнняў задачы Кашы для гіпербалічных дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў другога парадку і межавых задач для гіпербалічных дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў вышэйшых цотных парадкаў з зменнымі абласцямі вызначэння кавалкава-гладкіх па часе неабмежаваных аператарных каэфіцыентаў.

Метады даследавання. Метад сумавання энергетычных няроўнасцей, метад злепвання і метад працягу па параметры.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Даказана карэктнасць і даследавана гладкасць слабых рашэнняў гладкіх і кавалкава-гладкіх па часе межавых задач для гіпербалічных дыферэнцыяльна-аператарных раўнанняў цотных парадкаў з зменнымі абласцямі вызначэння і новых змешаных задач для гіпербалічных раўнанняў з нестацыянарными межавымі ўмовамі. *Навізна* складаецца ў новых згладжваючых аператарах, абагульненні метаду злепвання слабых рашэнняў на поўныя кавалкава-гладкія па часе гіпербалічныя дыферэнцыяльныя ўраўненні другога парадку.

Рэкамендацыі па ўжыванні. Вынікі працы варта выкарыстоўваць у даследаванні карэктнасці і гладкасці слабых рашэнняў краявых задач для разрыўных па часе гіпербалічных дыферэнцыяльных раўнанняў з зменнымі абсягамі вызначэння аператараў і іх прыкладанняў.

РЕЗЮМЕ

Ляхов Дмитрий Александрович

Слабые решения гиперболических дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения

Ключевые слова. Дифференциально-операторное уравнение, переменная область определения, слабое решение, метод склейки.

Объект и предмет исследования. *Объектом исследования* являются задача Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничные задачи для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения гладких и кусочно-гладких по времени неограниченных операторных коэффициентов. *Предмет исследования* – корректность и гладкость слабых решений задачи Коши для полных гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения.

Цель работы. Обобщение метода энергетических неравенств доказательства корректности по Адамару с класса сильных решений на случай слабых решений задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка и граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений высших четных порядков с переменными областями определения кусочно-гладких по времени неограниченных операторных коэффициентов.

Методы исследования. Метод суммирования энергетических неравенств, метод склейки и метод продолжения по параметру.

Полученные результаты и их новизна. Доказана корректность и исследована гладкость слабых решений гладких и кусочно-гладких по времени граничных задач для гиперболических дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения и новых смешанных задач для гиперболических уравнений с нестационарными граничными условиями. *Новизна* состоит в новых сглаживающих операторах, обобщении метода склейки слабых решений на полные кусочно-гладкие по времени гиперболические дифференциальные уравнения второго порядка.

Рекомендации по применению. Результаты работы следует использовать в исследовании корректности и гладкости слабых решений краевых задач для разрывных по времени гиперболических дифференциальных уравнений с переменными областями определения операторов и их приложений.

SUMMARY

Lyakhov Dmitry Alexandrovich

Weak solutions of hyperbolic operator-differential equations with variable domains

Keywords: operator-differential equation, variable domain, weak solution, bonding method.

Object and subject of research. *The objects of research* are the Cauchy problem for second-order hyperbolic operator-differential equations and boundary-value problems for even-order hyperbolic operator-differential equations with variable domains of smooth and piecewise smooth operator coefficients. *The subject of research* is correctness and smoothness in the set of weak solutions of the Cauchy problem for complete second-order hyperbolic operator-differential equations and boundary-value problems for even-order hyperbolic operator-differential equations with variable domains.

A purpose of work. The generalization of the method of energetic inequalities for proof of the correctness by Hadamard from strong solutions to weak solutions of the Cauchy problem for second-order hyperbolic operator-differential equations and boundary-value problems for even-order hyperbolic operator-differential equations with variable domains of time-smooth and time-piecewise smooth operator coefficients.

Methods of research. The summation method of energy inequalities, the bonding method and the method of continuation by parameter.

The obtained results and their novelty. The correctness by Hadamard time-smooth and time-piecewise smooth boundary-value problems for even-order hyperbolic operator-differential equations with variable domains and new mixed problems for hyperbolic equations with unsteady boundary conditions is proved and smoothness of weak solutions of these problems is investigated. The novelty consists in the new smoothing operators and generalization of the bonding method of weak solutions for complete time-piecewise smooth second-order hyperbolic differential equations.

Recommendations for use. The results of the thesis can be used in research of correctness and smoothness in the set of weak solutions of boundary-value problems for time-discontinuous hyperbolic operator-differential equations with variable domains and their applications.